De wedloop om de Zuidpool

PYTHAGORAS-PRIJSVRAAG 2012-2013

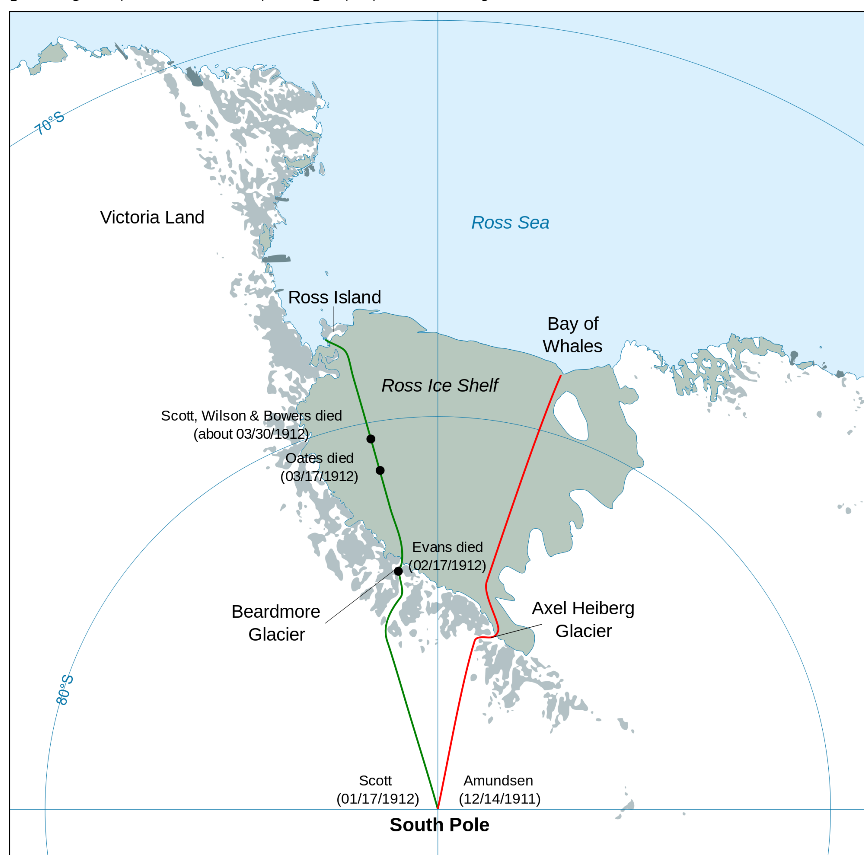
[Matthijs Coster]

Geschiedenis van prijsvragen

Pythagoras kent een lange geschiedenis van prijsvragen. Veelal waren deze prijsvragen gebaseerd op het rekenen met getallen: Vier Vieren, de Zevenprijsvraag en de Costergetallen. Ook meetkunde komt veel voor: de Veelvlakkenprijsvraag, het Pygram en Van 49 naar 50. Ook in *De Pythagoras Code*, het boek dat door *Pythagoras* werd uitgebracht in het kader van het vijftigjarig bestaan van het blad, worden enkele prijsvragen behandeld. Vorig jaar werd een modern onderwerp onder de loep genomen: automatentheorie.
Ditmaal kijken we met de Poolreis-prijsvraag naar de exponentiële functie.

Geschiedenis

De Poolreis-prijsvraag [1] is gebaseerd op de ware geschiedenis van de wedloop tussen de Noor Roald Amundsen en de Brit Robert Falcon Scott. Beide ontdekkingsreizigers zijn lang bezig geweest met voorbereidingen. Scott maakt in de zomerperiode al een reis in de richting van de Zuidpool om een depot in te richten.
Op 20 oktober 1911 vertrekt Amundsen met vier teamleden. Elk van de teamleden beschikt over een slede die getrokken wordt door 13 sledehonden. De honden worden tevens gebruikt als voedsel voor de in leven blijvende honden. Op 14 december 1911 bereikt hij met 16 honden de Zuidpool. Hij laat op de pool een bericht achter voor Scott en voor koning Haakon van Noorwegen. Op 25 januari keert hij terug bij zijn basiskamp.



figuur 1 – Overzicht van de routes die door Amundsen en Scott werden gevolgd

Op 24 oktober 1911 vertrekken twee motorsleden van de expeditie van Scott naar het zuiden.
Scott zelf vertrekt pas op 1 november. Hij neemt 8 pony's mee. Hij beschikt ook over een hondenslede die weer enkele dagen later vertrekt en die later Scott kan inhalen. Na 5 dagen reizen vindt Scott de motorsleden verlaten langs de weg. Hij kan de motorsleden niet repareren, en moet ze als verloren beschouwen. Op 21 november haalt Scott de expeditieleden van de motorsleden in. Enkele dagen later voegen ook de hondensleden zich bij de expeditie.
Op 8 december moet de expeditie een heel stuk klimmen. Dit is ondoenlijk voor de pony's. Er wordt besloten om de pony's te doden en het vlees op de terugweg te nuttigen. Enkele dagen later worden de hondensleden teruggestuurd om voorraden vanuit het basiskamp op te halen ten behoeve van de terugreis.

Op dat ogenblik gaat Scott nog met slechts 4 teamleden verder. Op 16 januari arriveert Scott bij de Zuidpool. Hij treft hier de spullen aan die Amundsen hier heeft achtergelaten.
Op 17 februari sterft een van de teamleden. De andere leden kunnen met moeite het depot bereiken dat op de heenweg was aangelegd. Het blijkt dat er te weinig voedsel en vooral brandstof is om de reis op een goede manier te vervolgen. Korte tijd daarna sterven ook de andere teamleden en tenslotte ook Scott. De dagboekaantekeningen stoppen. De hondensleden zijn niet meer opnieuw vertrokken om Scott en de teamleden te voorzien van extra proviand.
Het een en ander valt na te lezen op Wikipedia [2].

Probleemstelling

Stel je voor dat je in de schoenen van Scott zou staan. Je staat in het basiskamp Ross Island op het punt om met je expeditie te beginnen. Je hebt de beschikking over een onbeperkt aantal maaltijden, maar over een beperkt aantal dragers.

Je wilt de Zuidpool bereiken. Daarvoor heb je in totaal 90 dagen. Na deze periode is het te donker en te koud om nog over de poolkap te reizen. In die periode van 90 dagen moet je heen en terug, dus iedereen moet aan het einde veilig en gezond teruggekeerd zijn in het basiskamp.
Er gelden de volgende regels.

- Het team bestaat uit n dragers (D) en 1 leider (L). Zij kunnen per dag hoogstens 1 dagreis afleggen.
- De dragers en de leider eten aan het eind van elke dag 1 maaltijd.
- Een drager vervoert minimaal 0 en maximaal 3 maaltijden over de afstand van precies 1 dagreis (30 mijl). Aan het einde van de dagreis legt hij zijn maaltijden neer.
- De leider vervoert geen maaltijden: hij vervoert alleen de vlag.
- De leider moet op het verste punt van de hele expeditie de vlag planten. De dragers hoeven dit verste punt niet per se te bereiken.
- Het gehele team moet aan het einde van de tocht levend teruggekeerd zijn in het basiskamp.

Om te laten zien hoe de regels kunnen werken, geven we een eenvoudig voorbeeld.
We gaan met een leider en een drager op weg.

- **Dag 1** – D en L leggen één dagreis af. D draagt drie maaltijden. D en L eten elk een maaltijd. Er is nog één maaltijd over, die wordt achtergelaten in dit (eerste) voedseldepot.
- **Dag 2** – D gaat terug naar het basiskamp. L maakt een halve dagreis, plant de vlag op anderhalve dagreis van het basiskamp en keert terug naar het voedseldepot. L eet de laatste maaltijd.
- **Dag 3** – Ook L keert terug naar het basiskamp.

Er is drie dagen gereisd en de vlag staat op anderhalve dagreis afstand van het basiskamp. In negentig dagen kan je natuurlijk veel verder komen!

De prijsvraag valt uiteen in *drie* delen.

- Geef voor 1, 2 en 3 dragers een strategie waarmee je het verste het Poolgebied kan binnendringen in 90 dagen.
- We beginnen met n dragers. (In de vorige opgave was n = 1, 2 of 3.) Hoe ver kan je komen in 90 dagen? In je antwoord komt nu een n voor. Je mag ook een ondergrens en een bovengrens geven voor elke n.
- Je mag nu zoveel dragers meenemen als je wilt. Scott kan nu steeds een dagreis doorlopen. In 90 dagen kan hij dus 45 dagreizen heen en terug lopen. Hoeveel dragers moet hij minimaal meenemen, opdat de gehele tocht slaagt?

Verwijzingen naar vergelijkbare problemen

Gedurende de Universitaire Wiskunde Competitie van 1992-1993 werd er een vraag gesteld over een kameel die een woestijn inloopt. Dagelijks eet hij één banaan. Tevens kan hij één banaan op zijn rug vervoeren. Hij beschikt over een forse hoeveelheid bananen aan het begin van de woestijn. Michiel de Bondt kon van zijn oplossing aantonen dat deze optimaal was. In 1996 schreef hij hierover in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.[3]
Een probleem dat vergelijkbaar is met het Poolprobleem en in allerlei varianten op internet is te vinden als *jeep problem*, *desert crossing problem*, of *exploration problem*, gaat als volgt. Een jeep rijdt met een reservetank de woestijn in. De reservetank is even groot als de benzinetank en de jeep kan overal benzinedepots aanleggen. Hoe ver kan de jeep komen in n dagen?

Notatie

Het is belangrijk om een goede administratie bij te houden. Je moet bijhouden waar de leider is, waar de dragers zijn, en waar de maaltijden zijn. Uitgaande van een leider, n dragers en k dagen zijn er in het totaal $k(n + 1)$ maaltijden nodig. Dagelijks slinkt dit aantal maaltijden met $n + 1$. Na k dagen is de expeditie volbracht en zijn de maaltijden op.
We beginnen als volgt:

reisdag 1 (B)	basiskamp	depot 1	depot 2	depot 3	depot 4
Leider	1	0	0	0	0
Dragers	n	0	0	0	0
Maaltijden	k(n + 1)	0	0	0	0

Hierboven wordt de situatie weergegeven aan het begin (B) van de eerste reisdag. De leider en dragers bevinden zich, evenals de maaltijden, in het basiskamp. De depots die zullen worden aangelegd na resp. 1 t/m 4 dagreizen afstand zijn nog leeg.
We veronderstellen dat de leider nog op het basiskamp blijft, terwijl de dragers allen drie maaltijden verplaatsen naar depot 1. De situatie ziet er aan het einde (E) van reisdag 1 als volgt uit:

reisdag 1 (E)	basiskamp	depot 1	depot 2	depot 3	depot 4
Leider	1	0	0	0	0
Dragers	0	n	0	0	0
Maaltijden	(k – 3)n + k	3n	0	0	0

Dan volgt tenslotte nog de maaltijd (M). De leider eet op het basiskamp zijn maaltijd, terwijl de dragers bij depot 1 een maaltijd nuttigen.

reisdag 1 (M)	basiskamp	depot 1	depot 2	depot 3	depot 4
Leider	1	0	0	0	0
Dragers	0	n	0	0	0
Maaltijden	(k – 3)n + k – 1	2n	0	0	0

Dit is tevens de situatie bij het begin van reisdag 2. Nu kun je alle dragers weer terug laten keren naar het basiskamp, maar je kunt ook een deel van de dragers laten doorlopen naar depot 2. Het is verstandig om de dragers die vooruit lopen, volgepakt (dus met drie maaltijden) te laten lopen. Als ze op een later ogenblik terugkeren, moeten er voldoende maaltijden in depot 1 aanwezig te zijn om deze dragers niet te laten omkomen van de honger.

Versnelling met halve dagreizen

Het lijkt vanzelfsprekend om de depots na gehele dagreis afstanden aan te leggen. Maar dat is zeker niet het geval. Het kan efficiënter als je op willekeurige plaatsen depots mag aanleggen. We beschrijven een voorbeeld waarbij 7 dragers wordt opgedragen om vanuit het basiskamp het depot op één dagreis afstand te bevoorraden. Hoeveel pakketten kunnen zij overbrengen in 6 dagen?

Volgens de regels kan elke drager elke dag lopen met 3 dagmaaltijden. Van deze dagmaaltijden gebruikt hij op het einde van de dag één maaltijd. 7 dragers bereiken met 21 maaltijden het depot op 1 dagreis afstand, en souperen vervolgens 7 maaltijden. Er blijven 14 maaltijden over. Op de tweede dag lopen de dragers terug. In 6 dagen kunnen de dragers driemaal het depot aandoen, en na 6 dagen is het depot gevuld met 42 maaltijden.

Opmerkelijk is dat de dragers efficiënter kunnen werken, door onderweg (tijdelijke) depots aan te leggen. Veronderstel de groep dragers splitst zich op in een groep van 4 en 3 dragers. De groep van 4 dragers gaan op weg met 12 maaltijden en zij leggen een depot aan na een halve dagreis. Hier laten ze de 12 maaltijden achter. Zij lopen weer terug naar het basiskamp. Ondertussen gaat de groep van 3 dragers op weg en legt na driekwart dagreis een depot aan. Zij laten hier hun 9 maaltijden achter, vervolgens gaan ze weer terug. Het is duidelijk dat ze die dag nooit het basiskamp kunnen bereiken. Zij kunnen slechts het basiskamp benaderen op een afstand van een halve dagreis. Maar gelukkig treffen zij hier de maaltijden aan die de andere groep heeft achtergelaten. Zij eten 3 maaltijden. De volgende dag zijn er precies 9 maaltijden waarmee zij kunnen vertrekken. Zij lopen hiermee naar het depot op één dagreis afstand wat bevoorraad moet worden. Ze komen halverwege de dag aan, en hebben nog de mogelijkheid om terug te lopen naar het depot op driekwart dagreis afstand om daar de 9 maaltijden op te halen die zij daar een dag eerder hadden geplaatst. Zij komen met 18 maaltijden op het depot. Ondertussen kunnen de 4 dragers die op het basiskamp hebben overnacht met 12 maaltijden naar het depot op 1 dagreis afstand reizen. De 7 dragers komen na 2 dagen aan met 30 maaltijden. Daarvan nuttigen zij 7 maaltijden. Dan blijven er toch nog 23 over. De derde dag gaan de dragers gezamenlijk terug. De drie dagen erna herhalen ze dit procedé. In 6 dagen vervoeren ze maar liefst 46 maaltijden, dat zijn 4 maaltijden meer dan in het eerste geval.

Omdat deze oplossing de prijsvraag een stuk ingewikkelder maakt, heeft de redactie vooraf besloten om dergelijke variaties niet toe te laten in het officiële deel van de prijsvraag. Het is wel interessant om dit aan puzzelaars te vertellen. Wij zullen dit, op het moment dat de winnaars in *Pythagoras* bekend worden gemaakt, in ons blad vertellen.

Oplossingsidee

De leider kost alleen maar maaltijden; hij mag geen maaltijden vervoeren. Daarom is het raadzaam om de leider zo lang mogelijk op het basiskamp te laten en ondertussen op de opeenvolgende depots maaltijden klaar te zetten voor de leider. Hoeveel maaltijden heeft de leider nodig? Hij passeert elk station eenmaal op de heenweg en eenmaal op de terugweg, dus zijn twee maaltijden voldoende. Bij het laatste depot kun je kiezen uit één of twee maaltijden. Als er één maaltijd staat, dan eet de leider deze maaltijd bij aankomst en keert de volgende dag om en loopt terug naar het basiskamp. Als er twee maaltijden staan, dan kan de leider de volgende dag nog een tocht maken van een halve dagreis en daar pas omdraaien.
Veronderstel dat je beschikt over een maaltijdenwerpmachine. Deze machine werpt een maaltijd van het ene depot naar het volgende depot. In het optimale geval heeft de leider in elk depot een dergelijke machine opgesteld en heeft hij nauwelijks nog dragers nodig. Maar laten we eens kijken hoeveel dragers een dergelijke machine kan vervangen, er van uitgaande dat de machine twee maaltijden vooruit werpt per etmaal. (De keuze van twee blijkt later.)

reisdag d (B)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	1	0
Maaltijden	4	0

reisdag d + 1 (B)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	0	1
Maaltijden	1	2

reisdag d (E)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	0	1
Maaltijden	1	3

reisdag d + 1 (E)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	1	0
Maaltijden	1	2

reisdag d (M)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	0	1
Maaltijden	1	2

reisdag d + 1 (M)	depot k	depot k + 1
Leider	0	0
Dragers	1	0
Maaltijden	0	2

Hierboven staat een stukje van de administratie ten behoeve van één drager die reist vanaf depot k naar depot k +1, op de reisdagen d en d +1. Achtereenvolgens zie je dat aan het begin (B) van reisdag d er in depot k vier maaltijden gereed liggen voor de drager. Aan het einde (E) van reisdag d +1 liggen er 2 maaltijden in het volgende depot. De maaltijdenwerpmachine die twee maaltijden kan werpen, vervangt dus één drager. De vergelijking gaat natuurlijk alleen op als de maaltijdenwerpmachine ook nog twee maaltijden verspilt (bijvoorbeeld doordat de machine nog niet zo goed is ingesteld, en in precies de helft van de gevallen zijn doel mist). Veronderstel nu dat je deze maaltijdenwerpmachines op elk depot in grote aantallen hebt opgesteld. Stel dat je in het basiskamp 8 maaltijden wegschiet. Daarvan komen 4 maaltijden aan in depot 1. Deze maaltijden schiet je weer verder naar depot 2. Daar komen er 2 aan. Dit werkt in het algemeen. Uitgaande van 2^n maaltijden in het basiskamp, komen er 2^{n-1} maaltijden aan in depot 1, 2^{n-2} maaltijden aan in depot 2, …, en 2 maaltijden in depot $n - 1$ en 1 maaltijd in depot n.
Nu combineren we de ideeën die hierboven zijn genoemd. Plaats in elk van de depots twee maaltijden en maak gebruik van maaltijdenwerpmachines. Dit betekent dat voor de maaltijden in depot 1 er 4 maaltijden nodig zijn, 8 voor depot 2, en zo verder, steeds het dubbele van het vorige depot. In formulevorm: Voor depot n zijn 2^{n+1} maaltijden nodig. Het totaal aantal maaltijden dat nodig is, is dus:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2$$

Globaal verdubbelt het aantal benodigde maaltijden per extra depot.
Het aantal dagen dat gereisd mag worden (maximaal 90) en het aantal dragers bepaalt ruwweg hoe ver de leider kan komen. Ruwweg eten d dragers en één leider in 90 dagen $90(d + 1)$ maaltijden, maar ook $2^{n+2} - 2$ maaltijden. Hieruit valt n te berekenen.

Behandelen in de klas

De prijsvraag is zeker ook geschikt voor leerlingen uit de onderbouw. Het is voor de leerlingen leuk om met de prijsvraag bezig te zijn zonder enig idee te hebben van de exponentiële functie waarop deze prijsvraag is gebaseerd. Het is daarom raadzaam om leerlingen eerst in de gelegenheid te stellen om er zelf aan te werken.
Op een gegeven moment is het goed om de leerlingen te vertellen hoe je op een handige manier de administratie kunt bijhouden. Ik doe in dit artikel een suggestie, maar misschien is er wel een leerling met en beter idee!
Het is interessant, maar wel veel moeilijker om het verhaal van de voorafgaande paragraaf te vertellen. Op zich is dit natuurlijk niet nodig.

Ter afsluiting

De prijsvraag loopt nog tot **15 april 2013**. In het februarinummer van *Pythagoras* wordt er nog een aantal tips gegeven. Wij stellen het erg op prijs wanneer u uw leerlingen stimuleert om mee te doen aan een of meer onderdelen van de prijsvraag.
De redactie van *Pythagoras* is erg benieuwd naar wat u als docent van de prijsvraag vindt. We zien de oplossingen van uw leerlingen en uw reacties met veel plezier tegemoet.
U kunt mailen naar « *prijsvraag@pythagoras.nu* ».

Noten

[1] Het *Pythagoras*-artikel (jrg. 52, nov. 2012; pp. 4-5) is in PDF-formaat te vinden op:
www.pythagoras.nu/pyth/pdf/artikel_50211_4-5.pdf
[2] Zie bijvoorbeeld: *http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_the_Amundsen_and_Scott_Expeditions*
[3] Michiel de Bondt (1996): *The Camel-Banana Problem*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 14, nr. 3; pp. 415-426.

Over de auteur

Matthijs Coster is als wiskundige werkzaam bij het ministerie van Defensie. Hij is tevens lid van de redactie van *Pythagoras*.
E-mailadres: *matthijs@pythagoras.nu*